https://orcid.org/0000-0002-1658-5432
https://orcid.org/0000-0001-8581-9098

УДК 519.6:004.021

Л.П. ВАКАЛ*, Є.С. ВАКАЛ**

РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА АЛГОРИТМОМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

*Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ, Україна
**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ, Україна

Анотація. *У статті розглядається крайова задача для звичайного диференціального рівняння n-го порядку. Як наближений розв'язок задачі вибирається функція, що для довільних значень параметрів, які входять в неї, точно задовольняє крайові умови, а при підстановці функції у рівняння утворюється диференціальна нев'язка. Для пошуку оптимальних значень параметрів, на яких досягається мінімум функції відхилення диференціальної нев'язки від нуля, пропонується підхід із використанням алгоритму диференціальної еволюції. Даний підхід може бути поширений також на випадок, коли для довільних значень параметрів наближений розв'язок не задовольняє точно крайові умови і, окрім диференціальної нев'язки, з'являються нев'язки крайових умов. Алгоритм диференціальної еволюції служить для розв'язання задач багатовимірної оптимізації. В ньому моделюються основні еволюційні процеси в живій природі: схрещування, мутація, селекція. Це один із кращих еволюційних алгоритмів, який стабільно знаходить глобальний мінімум (максимум) функції за мінімальний час. На відміну від стандартної схеми диференціальної еволюції в алгоритмі, запропонованому у статті, еволюція здійснюється тільки за рахунок операцій мутації та селекції, без використання схрещування. Це сприяє спрощенню алгоритму без погіршення точності результатів. Алгоритм дозволяє розв'язувати як лінійні, так і нелінійні крайові задачі без внесення змін і залучення чисельних методів, а також використовувати різні норми для функції відхилення (квадратичну, чебишовську та ін.). Запропонований алгоритм реалізовано в Matlab. Наводяться результати обчислювальних експериментів із розв'язання низки тестових крайових задач для диференціальних рівнянь другого і четвертого порядків. Вони показують, що знайдені за алгоритмом диференціальної еволюції наближені розв'язки вказаних задач добре узгоджуються з їхніми точними розв'язками.*

Ключові слова: *алгоритм диференціальної еволюції, крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь, наближені розв'язки, квадратичне відхилення, чебишовське відхилення.*

Аннотация. *В статье рассматривается краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка. В качестве приближенного решения задачи выбирается функция, которая для произвольных значений входящих в нее параметров точно удовлетворяет краевым условиям, а при подстановке функции в уравнение образуется дифференциальная невязка. Для поиска оптимальных значений параметров, на которых достигается минимум функции уклонения дифференциальной невязки от нуля, предлагается подход с использованием алгоритма дифференциальной эволюции. Данный подход может быть распространен также на случай, когда для произвольных значений параметров приближенное решение не удовлетворяет точно краевым условиям и, кроме дифференциальной невязки, появляются невязки краевых условий. Алгоритм дифференциальной эволюции служит для решения задач многомерной оптимизации. В нем моделируются основные эволюционные процессы в живой природе: скрещивание, мутация, селекция. Это один из лучших эволюционных алгоритмов, стабильно находящий глобальный минимум (максимум) функции за минимальное время. В отличие от стандартной схемы дифференциальной эволюции в алгоритме, предложенном в статье, эволюция происходит только за счет операций мутации и селекции, без использования скрещивания. Это способствует упрощению алгоритма без ухудшения точности результатов. Алгоритм позволяет решать как линейные, так и нелинейные краевые задачи, не внося изменений и не применяя численные методы, а также использовать разные нормы для функции уклонения (квадратичную, чебышевскую и др.). Предложенный алгоритм реализован в Matlab. Приводятся результаты вычислительных экспериментов по решению ряда тестовых краевых задач для дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков. Они показывают, что полученные по алгоритму дифференциальной эволюции приближенные решения указанных задач хорошо согласуются с их точными решениями.*

Ключевые слова: *алгоритм дифференциальной эволюции, краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, приближенные решения, квадратичное уклонение, чебышевское уклонение.*

Abstract. *In the paper considers a boundary value problem for an ordinary differential equation of the* n^{th} *order. As an approximate solution to the problem, it is selected a function which for arbitrary values of parameters included in it exactly satisfies the boundary conditions, and when the function is substituted into the equation, a differential residual is formed. To search optimal values of the parameters at which the minimum of a deviation function of the differential residual from zero is achieved, it is proposed an approach using the differential evolution algorithm. The approach can also be extended to a case when the approximate solution does not satisfy exactly the boundary conditions for arbitrary values of its parameters and, in addition to the differential residual, there are also residuals of the boundary conditions. Differential evolution algorithm is used to solve multidimensional optimization problems. It simulates basic evolutionary processes in nature: crossover, mutation, selection. It is one of the best evolutionary algorithms stably finding function global minimum (maximum) in minimum time. Unlike the standard scheme of differential evolution, in the proposed algorithm the evolution occurs only due to mutation and selection operations, crossover doesn't use. This allows us to simplify the algorithm without compromising the results accuracy. The algorithm allows to solve both linear and nonlinear boundary value problems without making changes and not applying numerical methods, and it also allows to use different norms for the deviation function (quadratic, Chebyshev, etc.). The proposed algorithm is implemented in Matlab. Results of computational experiments to solve test boundary value problems for differential equations of the second and fourth orders are presented. They show that approximate solutions of these problems obtained by the differential evolution algorithm are in good agreement with their exact solutions.*
Kewwords: *differential evolution algorithm, boundary value problems for ordinary differential equations, approximate solutions, quadratic deviation, Chebyshev deviation.*

DOI: 10.34121/1028-9763-2020-1-43-52

1. Вступ

Алгоритм диференціальної еволюції (ДЕ) був запропонований Р. Сторном і К. Прайсом [1] і призначений для розв'язання задач багатовимірної оптимізації. Це один із кращих еволюційних алгоритмів, який стабільно знаходить глобальний оптимум цільової функції – критерію оптимізації – за мінімальний час. У загальному випадку цільова функція може бути недиференційовною, нелінійною, багатоекстремальною і з великою кількістю змінних. Алгоритм ДЕ, крім того, нескладний у реалізації та використанні (містить мало параметрів, що потребують налаштування), легко розпаралелюється. Завдяки цьому, алгоритм ДЕ знайшов широке застосування при розв'язанні різних прикладних задач [2–8].

Метою роботи є модифікація алгоритму ДЕ для знаходження оптимальних значень параметрів наближених розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. До таких задач математичної фізики приходять при моделюванні фізичних процесів у балістиці, теорії пружності, теорії коливань, механіці рідин і газів, динаміці твердого тіла, оптимальному керуванні та інших областях науки й техніки.

Слід зазначити, що публікацій щодо застосування еволюційних алгоритмів для розв'язування задач математичної фізики дуже мало. Наприклад, у роботах [9–12] для пошуку наближених розв'язків деяких крайових задач використовується один із перших і найвідоміших еволюційних алгоритмів – генетичний.

2. Постановка задачі та аналіз методів її розв'язання

Розглядаємо загальне диференціальне рівняння n-го порядку ($n \geq 2$)

$$f(x,u,u',\ldots,u^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

із заданими нелінійними крайовими умовами

$$g_{\mu}(u_1,u_1',\ldots,u_1^{(\sigma_1)};\ldots;u_k,u_k',\ldots,u_k^{(\sigma_k)}) = A_{\mu}, \ \mu = 1, 2,\ldots,n, \tag{2}$$

де $u_i^{(s)} = u^{(s)}(x_i)$, $s = 0, 1, 2, \ldots, \sigma_i$ ($\sigma_i \le n-1$), $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ($k \ge 2$) – задана система точок відрізку $[a, b]$ [13, с. 240]. Слід зауважити, що для рівнянь порядку $n > 2$ можливі випадки, коли частина умов (2) задається у внутрішніх точках проміжку $[a, b]$ [14, с. 261]).

Для наближеного розв'язання крайової задачі (1), (2) вибираємо функцію

$$v = v(x, c_1, c_2, \ldots, c_m), \tag{3}$$

яка містить незалежні параметри $c_1, c_2, \ldots, c_m$ і таку, що для довільних значень цих параметрів функція v задовольняє крайові умови (2). Підставляючи (3) у ліву частину рівняння (1), отримаємо диференціальну нев'язку

$$R(x, c_1, c_2, \ldots, c_m) \equiv f(x, v, v', \ldots, v^{(n)}). \tag{4}$$

Нев'язка (4) є певною характеристикою відхилення наближеного розв'язку v від невідомого точного розв'язку u. Якщо для деяких значень параметрів ця нев'язка тотожно дорівнює нулю на проміжку $[a, b]$, то функція v збігається з точним розв'язком u. Як правило, при розв'язуванні крайових задач не вдається отримати нульову нев'язку. Тому намагаються знайти такі значення параметрів $c_1, c_2, \ldots, c_m$ наближеного розв'язку (3), щоб на відрізку $[a, b]$ відхилення диференціальної нев'язки від нуля було мінімальним. Різна реалізація цієї вимоги приводить до різних наближених методів розв'язання крайової задачі: методу найменших квадратів (інтегральному і дискретному), методу колокації, методу Гальоркіна та ін. [13–15]. У підсумку пошук параметрів $c_1, c_2, \ldots, c_m$ зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь. У випадку нелінійної крайової задачі система також буде нелінійною і для її розв'язання доведеться використовувати чисельні методи. Крім того, у деяких методах обчислення матриці коефіцієнтів і координат вектора правої частини системи рівнянь вимагає інтегрування по всьому відрізку, що приводить до необхідності застосування методів чисельного інтегрування. Як показує практика, вказані наближені методи використовуються переважно для розв'язання лінійних крайових задач для диференціальних рівнянь другого порядку.

У статті для наближеного розв'язання крайової задачі (1), (2) пропонується підхід, який дозволяє розв'язувати як лінійні, так і нелінійні задачі без залучення чисельних методів. Він полягає у тому, що задача визначення параметрів $c_1, c_2, \ldots, c_m$ наближеного розв'язку (3) розглядається як задача пошуку мінімуму функції відхилення Δ диференціальної нев'язки (4) від нуля:

$$\Delta(c_1, c_2, \ldots, c_m) = \min, \tag{5}$$

і задача оптимізації (5) розв'язується за допомогою алгоритму диференціальної еволюції [1]. В ролі функції Δ може виступати чебишовське відхилення [16, 17], яке визначається як максимум модуля нев'язки R на сітці $E_N = \{x_s, s = 1, 2, \ldots, N\} \subset [a, b]$:

$$\Delta_1(c_1, c_2, \ldots, c_m) = \max_{1 \le s \le N} \left| R(x_s, c_1, c_2, \ldots, c_m) \right|, \tag{6}$$

квадратичне відхилення

$$\Delta_2(c_1, c_2, \ldots, c_m) = \sum_{s=1}^{N} R^2(x_s, c_1, c_2, \ldots, c_m) \tag{7}$$

або відхилення виду

$$\Delta_3(c_1, c_2, \ldots, c_m) = \sum_{s=1}^{N} \left| R(x_s, c_1, c_2, \ldots, c_m) \right|. \qquad (8)$$

Запропонований підхід може бути поширений також на випадок, коли функція (3) не задовольняє одну або декілька крайових умов і, окрім диференціальної нев'язки, з'являються нев'язки крайових умов.

3. Алгоритм

В алгоритмі ДЕ моделюються основні еволюційні процеси в живій природі: схрещування, мутація, селекція. Стандартна схема алгоритму включає такі кроки [1]. Спочатку генерується множина векторів – популяція, що представляє собою можливі розв'язки задачі оптимізації. Потім для кожного вектора поточної популяції, який називається базовим або вектором-мішенню, з використанням трьох випадкових векторів створюється мутантний вектор. Над останнім виконується операція схрещування, під час якої в залежності від заданої ймовірності схрещування *Cr* деякі його координати замінюються на координати вектора-мішені. Далі проводиться селекція: з двох векторів – мутантного і базового – в нову популяцію переходить вектор, який має краще значення цільової функції (у випадку задачі (5) – менше значення функції відхилення Δ). Ця послідовність кроків – мутація, схрещування, селекція – повторюється до тих пір, поки не виконається термінальна умова [1, 18], наприклад, кількість сформованих популяцій досягне заданого максимального числа.

Схема алгоритму розв'язання крайової задачі (1), (2) змінена порівняно з описаною вище стандартною схемою, а саме, в еволюційному процесі не використовується операція схрещування. Як показав досвід застосування алгоритму ДЕ в задачах найкращої апроксимації функцій [5–8, 18], які теж зводяться до оптимізаційної задачі (5), ймовірність *Cr* того, що координати мутантного вектора залишаться після операції схрещування незмінними, задається в діапазоні $0{,}9 \le Cr \le 1$. Отже, в подібних задачах вплив схрещування на еволюційний процес зовсім незначний і операції мутації достатньо для створення потрібного різноманіття векторів популяції під час пошуку оптимуму.

Нижче наводиться схема алгоритму ДЕ для пошуку оптимальних значень параметрів наближеного розв'язку крайової задачі (1), (2).

1. Покладається $G = 0$, де G – номер популяції, та генерується початкова популяція векторів $C_i = (c_{i1}, \ldots, c_{im})$, $i = 1, \ldots, Np$, де Np – розмір популяції. Координати $c_{i1}, \ldots, c_{im}$ вектора C_i – випадкові дійсні числа із проміжку $[-1, 1]$ (у подальшій еволюції значення координат можуть виходити далеко за його межі).

2. Для векторів початкової популяції обчислюються значення цільової функції

$$F(C_i) = \Delta_k(c_{i1}, \ldots, c_{im}), \qquad (9)$$

де $k = 1, 2, 3$. Для $k = 1$ значення відхилення Δ_k у точках $x_s, s = 1, \ldots, N$, сітки E_N обчислюються за формулою (6), для $k = 2$ – за формулою (7) і для $k = 3$ – за формулою (8).

3. Для вектора-мішені C_i, $i = 1, \ldots, Np$, створюється мутантний вектор $\widetilde{C}_i$:

$$\widetilde{C}_i = C_{r_1} + Fm \cdot (C_{r_2} - C_{r_3}),$$

де r_1, r_2, r_3 – випадкові цілі числа із проміжку $[1, Np]$, $r_1 \ne r_2 \ne r_3 \ne i$, $Fm \in (0, 2]$ – заданий коефіцієнт мутації, і за формулою (9) обчислюється $F(\widetilde{C}_i)$.

4. Селекція. Якщо $F(\widetilde{C}_i) < F(C_i)$, то в нову популяцію з номером $G + 1$ включаєть-

ся вектор $\widetilde{C}_i$, інакше – в популяцію $G+1$ переходить вектор-мішень C_i.

5. Якщо $G < G_{max}$, де G_{max} – задане максимальне число популяцій, то відбувається перехід на п. 3. У протилежному випадку визначається вектор C_{best}, який має найменше значення цільової функції в популяції з номером G_{max}, і алгоритм завершується.

Розмір популяції Np і коефіцієнт мутації Fm є основними параметрами налаштування алгоритму ДЕ. При розв'язанні задачі (1), (2) рекомендуються такі значення цих параметрів: $5m \le Np \le 10m$, $0{,}4 \le Fm \le 0{,}6$. Вибір значення параметра G_{max} залежить від числа шуканих параметрів наближеного розв'язку (3). Для $m \le 5$ можна вибрати $G_{max} = 200$.

Описаний алгоритм реалізовано засобами системи комп'ютерної математики Matlab з використанням символьних обчислень [19].

4. Результати обчислювальних експериментів

За допомогою запропонованого алгоритму виконано обчислювальні експерименти з розв'язання низки тестових крайових задач, для яких відомі точні розв'язки, і проведено їх порівняння із знайденими наближеними розв'язками. Нижче наведено приклади розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь різних порядків.

Приклад 1. Лінійна крайова задача для рівняння другого порядку:

$$u'' + u + x = 0,\ u(0) = 0, u(1) = 0. \tag{10}$$

Як наближений розв'язок задачі (10) візьмемо функцію

$$v_m(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k x^k (1-x), \tag{11}$$

яка для довільних значень параметрів точно задовольняє крайові умови.

Спочатку розглянемо випадок $m = 2$. Підставляючи функцію (11) в рівняння, отримаємо диференціальну нев'язку:

$$R(x, c_1, c_2) = c_1(-2 + x - x^2) + c_2(2 - 6x + x^2 - x^3) + x.$$

За алгоритмом ДЕ з цільовою функцією $F = \Delta_3$, значення якої обчислюються за формулою (8) в точках сітки $E_N = \{x_s = 0{,}005 \cdot (s-1), s = 1, \dots, N\}$, $N = 201$, отримано наближений розв'язок:

$$v_2(x) = 0{,}189142x(1-x) + 0{,}171892x^2(1-x).$$

Значення цільової функції F для нього дорівнює 3,4944.

За алгоритмом ДЕ отримано також наближені розв'язки для випадків $m = 3$ і $m = 4$:

$$v_3(x) = 0{,}188037x(1-x) + 0{,}193676x^2(1-x) - 0{,}02349x^3(1-x),$$

$$v_4(x) = 0{,}188388x(1-x) + 0{,}188573x^2(1-x) - 0{,}010455x^3(1-x) - 0{,}008610x^4(1-x).$$

При цьому значення цільової функції F дорівнює 0,5424 для $m = 3$ і 0,0187 для $m = 4$.

Слід зазначити, що мінімізація функції F в алгоритмі ДЕ відбувається досить швидко. Як видно з рис. 1, для $m = 3$ вже в 30-й популяції $F < 0{,}56$, а для $m = 4$ в 65-й популяції $F < 0{,}02$ (з ростом числа параметрів m відбувається розширення області пошуку, що вимагає більшого числа популяцій для досягнення мінімуму цільової функції).

З табл. 1, де наведено значення точного розв'язку $u(x) = \sin x / \sin 1 - x$ [15, с. 204] і наближених розв'язків $v_m(x)$ крайової задачі (10) в деяких точках відрізка [0,1], видно, що з ростом m похибка $|u(x) - v_m(x)|$ наближеного розв'язку $v_m(x)$ швидко зменшується, і функції $v_3(x)$ та $v_4(x)$ вже достатньо добре апроксимують точний розв'язок $u(x)$. Зазначимо для порівняння, що похибка 0,00098 отриманої функції $v_2(x)$ практично збігається з похибкою 0,001 розв'язку

$$\tilde{v}_2(x) = x(1-x)(0{,}192412 + 0{,}170732x),$$

знайденого за методом Гальоркіна [15].

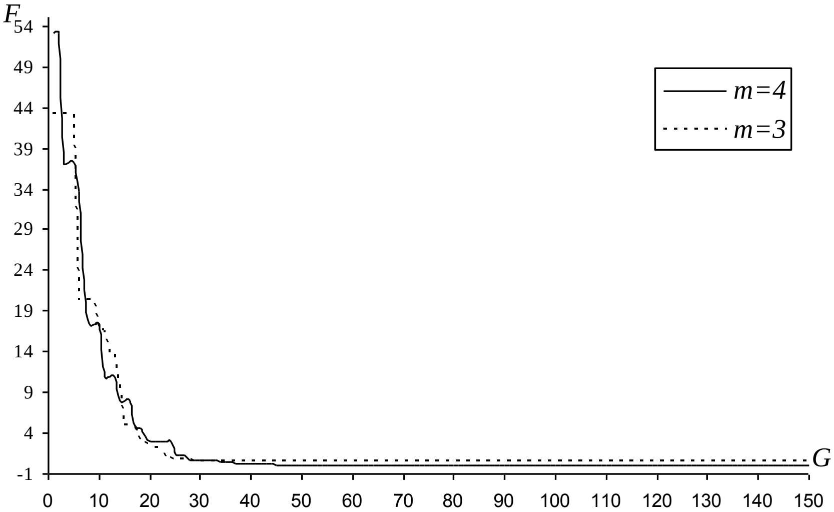

Рисунок 1 – Значення цільової функції F найкращого вектора популяції в залежності від номера популяції G

Таблиця 1 – Порівняння точного і наближених розв'язків задачі (10)

x	0,25	0,5	0,75
$u(x)$	0,0440137	0,0697470	0,0600562
$v_2(x)$	0,04352	0,06877	0,05964
$v_3(x)$	0,044060	0,069751	0,060015
$v_4(x)$	0,0440144	0,0697462	0,0600572
$\|u(x) - v_2(x)\|$	0,00049	0,00098	0,00042
$\|u(x) - v_3(x)\|$	0,000047	0,000004	0,000041
$\|u(x) - v_4(x)\|$	0,0000007	0,0000008	0,0000010

Приклад 2. Крайова задача для нелінійного диференціального рівняння другого порядку з лінійними крайовими умовами:

$$u'' - 4(u')^2 + 16u - 2 = 0, \; u(0) = 0, \; u(1) = 1. \tag{12}$$

Наближений розв'язок задачі (12) шукаємо у вигляді

$$v(x) = x + c_1 x(1-x) + c_2 x^2 (1-x).$$

Диференціальна нев'язка у цьому випадку є такою:

$$R(x,c_1,c_2)=v''(x)-4[v'(x)]^2+16v(x)-2\,,$$

де $\quad v'(x)=1+c_1(1-2x)+c_2(2x-3x^2)\,,\; v''(x)=-2c_1+2c_2(1-3x)\,.$

За алгоритмом ДЕ з цільовою функцією $F=\Delta_1$, значення якої обчислювались за формулою (6) в точках рівномірної сітки E_{101}, отримано такі результати:

$$c_1=-1{,}0\,,\; c_2\approx 0{,}9\cdot 10^{-18}\,,\; F=0{,}9\cdot 10^{-15}\,.$$

Легко бачити, що знайдений наближений розв'язок задачі (12)

$$v(x)=(1+0{,}9\cdot 10^{-18})x^2-0{,}9\cdot 10^{-18}x^3$$

практично збігається з її точним розв'язком $u(x)=x^2$.

Запропонований підхід із використанням ДЕ може застосовуватися також і у випадках, коли наближений розв'язок (3) не задовольняє декілька або навіть усі крайові умови (2) і, крім диференціальної нев'язки (4), з'являються нев'язки крайових умов. Нижче наведено приклади задач, де виникають такі ситуації.

Приклад 3. Крайова задача для лінійного диференціального рівняння 4-го порядку:

$$u^{\mathrm{IV}}-63u''-64u=-300e^{-2x}\,,\; 0<x<1\,, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &u(0)+u''(0)=5,\; u(0)-u''(0)=-1,\\ &u'(1)=-1{,}11214,\; u''(1)=0{,}00103883. \end{aligned} \tag{14}$$

Як наближений розв'язок цієї задачі взято функцію

$$v(x)=e^{-2x}+\mathrm{c}_1+\mathrm{c}_2x^2+\mathrm{c}_3x^4+\mathrm{c}_4x^6\,. \tag{15}$$

Функція (15) для довільних значень $\mathrm{c}_1, c_2, c_3, c_4$ не задовольняє точно ні рівняння (13), ні крайові умови (14). Підставляючи $v(x)$ в (13) і (14), отримаємо диференціальну нев'язку

$$R_1(x,c_1,c_2,c_3,c_4)=v^{\mathrm{IV}}-63v''-64v+300e^{-2x}\,,$$

де $\quad v''(x)=4e^{-2x}+2c_2+12c_3x^2+30c_4x^4\,,\; v^{\mathrm{IV}}(x)=16e^{-2x}+24c_3+360c_4x^2\,,$

і чотири нев'язки крайових умов:

$$R_2(c_1,c_2)=c_1+2c_2\,,\; R_3(c_1,c_2)=c_1-2c_2-2\,,$$

$$R_4(c_2,c_3,c_4)=-2e^{-2}+2c_2+4c_3+6c_4+1{,}11214,$$

$$R_5(c_2,c_3,c_4)=4e^{-2}+2c_2+12c_3+30c_4-0{,}00103883.$$

Усі п'ять нев'язок мають бути враховані в цільовій функції.

З використанням алгоритму ДЕ з цільовою функцією

$$F=\max_{1\le s\le N}\left|R_1(x_s)\right|+\left|R_2\right|+\left|R_3\right|+\left|R_4\right|+\left|R_5\right| \tag{16}$$

на рівномірній сітці E_{101} отримано такий наближений розв'язок задачі (13), (14):

$$v(x)=e^{-2x}+1{,}000013-0{,}499993x^2+0{,}041625x^4-0{,}001341x^6\,. \tag{17}$$

Значення функції (16) для нього дорівнює 0,003202. Наведені в табл. 2 результати показують, що функція (17) досить добре наближає точний розв'язок $u(x) = cos\,x + e^{-2x}$ [20] крайової задачі (13), (14).

Таблиця 2 – Порівняння точного $u(x)$ і наближеного $v(x)$ розв'язків задачі (13), (14)

x	$u(x)$	$v(x)$	$\lvert u(x) - v(x) \rvert$
0	2	2,000013	0,000013
0,2	1,650387	1,650400	0,000013
0,4	1,370390	1,370403	0,000013
0,6	1,126530	1,126542	0,000012
0,8	0,898603	0,898612	0,000009
1	0,675638	0,675639	0,000001

Приклад 4. Крайова задача для нелінійного диференціального рівняння другого порядку з нелінійними крайовими умовами:

$$u'' \cdot u - (u')^2 = 0,\; u(0) \cdot u'(0) = 1,\; u(1) - u'(1) = 0. \tag{18}$$

Наближений розв'язок задачі (18) шукаємо у вигляді

$$v(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 . \tag{19}$$

Функція (19) для довільних c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 не задовольняє точно ні крайові умови, ні рівняння. У цьому випадку після підстановки функції $v(x)$ у крайову задачу (18) отримаємо диференціальну нев'язку:

$$R_1(x, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = v''(x) \cdot v(x) - [v'(x)]^2 ,$$

де $$v'(x) = c_2 + 2c_3 x + 3c_4 x^2 + 4c_5 x^3 ,\; v''(x) = 2c_3 + 6c_4 x + 12c_5 x^2 ,$$

і дві нев'язки крайових умов:

$$R_2(c_1, c_2) = c_1 \cdot c_2 - 1,\; R_3(c_1, c_3, c_4, c_5) = c_1 - c_3 - 2c_4 - 3c_5 .$$

За алгоритмом ДЕ з цільовою функцією

$$F = \sum_{s=1}^{N} [R_1(x_s)]^2 + \lvert R_2 \rvert + \lvert R_3 \rvert , \tag{20}$$

значення якої обчислювались у точках рівномірної сітки E_{101}, знайдено такий наближений розв'язок задачі (18):

$$v(x) = 1{,}0000406 + 0{,}9999594x + 0{,}5103598x^2 + 0{,}1353596x^3 + 0{,}0729872x^4 .$$

Значення цільової функції (20) дорівнює 0,00923.

Оскільки відомий точний розв'язок $u(x) = e^x$ [12] задачі (18), то можна обчислити похибку наближеного розв'язку $v(x)$. Вона дорівнює 0,000425 (табл. 3).

Таблиця 3 – Порівняння точного $u(x)$ і наближеного $v(x)$ розв’язків задачі (18)

x	$u(x)$	$v(x)$	$\lvert u(x)-v(x)\rvert$
0	1	1,000041	0,000041
0,2	1,221403	1,221647	0,000244
0,4	1,491825	1,492213	0,000389
0,6	1,822119	1,822443	0,000324
0,8	2,225541	2,225838	0,000297
1	2,718282	2,718707	0,000425

5. Висновки

У роботі запропоновано алгоритм диференціальної еволюції для знаходження параметрів наближених розв’язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь n–го порядку. Алгоритм дозволяє використовувати різні норми нев’язок (чебишовську, квадратичну та ін.) і розв’язувати як лінійні, так і нелінійні задачі без внесення змін і залучення чисельних методів. На відміну від стандартної схеми ДЕ, в запропонованому алгоритмі еволюція відбувається тільки за рахунок операцій мутації та селекції (операція схрещування не використовується). Це дозволило спростити алгоритм без погіршення точності отриманих розв’язків. Аналіз результатів обчислювальних експериментів показав, що знайдені за алгоритмом ДЕ наближені розв’язки тестових задач добре узгоджуються з їхніми точними розв’язками. Запропонований алгоритм можна розглядати як додатковий інструмент до традиційних методів розв’язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, особливо в нелінійних випадках, коли реалізація цих методів ускладнена.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. P. 341–35.

2. Varadarajan M., Swarup K.S. Differential evolution approach for optimal reactive power dispatch. *Applied Soft Computing*. 2008. Vol. 8, N 4. P. 1549–1561.

3. Das S., Konar, A. Automatic Image Pixel Clustering with an Improved Differential Evolution. *Applied Soft Computing*. 2009. Vol. 9, N 1. P. 226–236.

4. Develi I. A new approximation based on the differential evolution for the gaussian *Q*-function. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*. 2012. N 10. P. 7095–7102.

5. Vakal L.P. Seeking Optimal Knots for Segment Approximation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 11. P. 68–75.

6. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Розв’язання перевизначеної системи трансцендентних рівнянь із використанням диференціальної еволюції. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Технічні науки.* 2017. Вип. 15. С. 24–30.

7. Вакал Л.П. Апроксимація функцій багатьох змінних із застосуванням алгоритму диференціальної еволюції. *Математичні машини і системи*. 2017. № 1. С. 90–96.

8. Вакал Л.П., Вакал Є.С. Знаходження оптимальних параметрів емпіричних формул декількох змінних за допомогою еволюційних алгоритмів. *Математичні машини і системи*. 2018. № 3. С. 109–116.

9. Ясницкий Л.Н., Гладкий С.Л., Никитенко И.И., Тарасов М.А. Искусственный интеллект в решении краевых задач проектной инженерии. URL: http://www.permai.ru/files/projects/P03.pdf.

10. Abu-Arqub Omar, Abo-Hammour Zaer, Momani Shaher. Application of continuous genetic algorithm for nonlinear system of second-order boundary value problems. *Applied Mathematics & Information Sciences.* 2014. Vol. 8, N 1. P. 235–248.

11. Vakal L.P. Using genetic algorithm for solving boundary value problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, N 8. P. 52–62.

12. Вакал Л.П. Генетичні алгоритми як інструмент розв’язання нелінійних крайових задач. *Комп’ютерні засоби, мережі та системи*. 2015. № 14. С. 16–23.
13. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967. 368 с.
14. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
15. Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука, 1987. 248 с.
16. Vakal L.P. Solving uniform nonlinear approximation problem using continuous genetic algorithm. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 6. P. 49–59.
17. Каленчук-Порханова А.О., Вакал Л.П. Застосування найкращої чебишовської апроксимації для моделювання деяких фізичних процесів. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Технічні науки*. 2010. Вип. 4. С. 111–118.
18. Vakal L.P., Kalenchuk-Porkhanova A.A., Vakal E.S. Increasing the Efficiency of Chebyshev Segment Fractional Rational Approximation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 5. P. 759–765.
19. Довгий Б.П., Вакал Є.С., Вакал Ю.Є., Попов А.В. Використання математичного пакета matlab для розв’язування прикладних задач. Київ: Фітосоціоцентр, 2012. 78 с.
20. Моршнева И.В., Овчинникова С.Н. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод стрельбы. Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 2003. 29 с.

Стаття надійшла до редакції 13.02.2020