https://orcid.org/0000-0003-4894-8995

УДК 517.958:519.63

М.Г. БЕРДНИК*

НОВЕ КІНЦЕВЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В ДОВІЛЬНІЙ ОБЛАСТІ

*Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», м. Дніпро, Україна

Анотація. *Від архітектури і ефективності системи охолодження гарячих компонентів суперкомп'ютера буде залежати надійність, живучість, а також оптимальний робочий режим експлуатації суперкомп'ютера. Ось чому до числа проблем, що представляють великий теоретичний і практичний інтерес, відноситься проблема вивчення температурних полів, які виникають в елементах довільної конфігурації охолодження суперкомп'ютера. Для вирішення даного класу задач теплопровідності найбільш зручним виявився метод кінцевих інтегральних перетворень. У статті вперше побудовано нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в довільній області, обмеженій декількома замкненими кусково-гладкими контурами. Наводиться формула оберненого перетворення. Знаходження ядра побудованого нового кінцевого інтегрального перетворення для рівняння Лапласа методом скінченних елементів у формі Гальоркіна для симплекс елементів першого порядку зводиться до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь. Для перевірки працездатності нового інтегрального перетворення проведено розрахунки розв'язків крайової задачі для рівняння Лапласа, отриманих за допомогою розробленого нового інтегрального перетворення і відомого аналітичного розв'язку. Представлені результати порівняння розрахунків розв'язку рівняння Лапласа у випадку квадрата з довжиною сторін, рівною одиниці, і на одній із сторін квадрата температура рівна одиниці, а на інших температура рівна нулю з відомим аналітичним розв'язком і отриманим розв'язком, одержаним за допомогою нового інтегрального перетворення. Ці результати були отримані для 228 симплекс елементів першого порядку і 135 вузлів. Максимальне відхилення по модулю цих рішень становить 0,096, математичне сподівання відхилень – 0,009, а дисперсія відхилень – 0,001. Розроблене інтегральне перетворення дає можливість отримати рішення складних крайових задач математичної фізики.*

Ключові слова: *крайова задача, інтегральне перетворення, оператор Лапласа, власні значення, власні функції.*

Аннотация. *От архитектуры и эффективности системы охлаждения горячих компонентов суперкомпьютера будет зависеть надежность, живучесть, а также оптимальный рабочий режим эксплуатации суперкомпьютера. Вот почему к числу проблем, которые представляют большой теоретический и практический интерес, относится проблема изучения температурных полей, возникающих в елементах произвольной конфигурации охлаждения суперкомпьютера. Для решения данного класса задач теплопроводности наиболее удобным оказался метод конечных интегральных преобразований. В статье впервые построено новое конечное интегральное преобразование для уравнения Лапласа в произвольной области, ограниченной несколькими замкнутыми кусочно-гладкими контурами. Приводится формула обратного преобразования. Нахождение ядра построенного нового конечного интегрального преобразования методом конечных элементов в форме Галеркина для симплекс элементов первого порядка сводится к решению системы алгебраических уравнений. Для проверки работоспособности нового интегрального преобразования проведены расчеты решений краевой задачи для уравнения Лапласа, полученные с помощью разработанного нового интегрального преобразования и известного аналитического решения. Представлены результаты сравнения расчетов решения уравнения Лапласа в случае квадрата с длиной сторон, равной единице, и на одной из сторон квадрата температура равна единице, а на других температура равна нулю с известным аналитическим решением и решением, полученным с помощью нового интегрального преобразования. Эти результаты были получены для 228 симплекс элементов первого порядка и 135 узлов. Максимальное отклонение по модулю этих решений составляет 0,096, математическое ожидание отклонений – 0,009, а дисперсия отклонений – 0,001. Разработанное интегральное преобразование дает возможность получить решение сложных краевых задач математической физики.*

Ключевые слова: *краевая задача, интегральное преобразование, оператор Лапласа, собственные значения, собственные функции.*

Abstract. *Reliability, survivability, as well as the optimal operating mode of operation of the supercomputer will depend on the architecture and efficiency of the cooling system of the hot components of the supercomputer. That is why the number of problems, of great theoretical and practical interest, is the problem of studying the temperature fields arising in elements of arbitrary configuration, cooling a supercomputer. To solve this class of heat conduction problems, the method of finite integral transformations turned out to be the most convenient. This article is the first to construct a new finite integral transformation for the Laplace equation in an arbitrary domain bounded by several closed piecewise-smooth contours. An inverse transformation formula is given. Finding the core of the constructed new finite integral transformation by the finite element method in the Galerkin form for simplex first-order elements reduces to solving a system of algebraic equations. To test the operability of the new integral transformation, calculations were carried out of solutions of the boundary value problem for the Laplace equation obtained using the developed new integral transformation and the well-known analytical solution. The results of comparison the calculations of the solution of the Laplace equation are presented. In the case of a square with a side length equal to one and on one side of the square, the temperature is unity, and on the other, the temperature is zero, with a well-known analytical solution and a solution obtained using the new integral transformation. These results were obtained for 228 simplex first-order elements and 135 nodes. The maximum deviation modulo of these solutions is 0,096, the mathematical expectation of deviations is 0,009, and the variance of the type is 0,001. The developed integral transformation makes it possible to obtain a solution to complex boundary value problems of mathematical physics.*

Keywords: *boundary value problem, integral transformation, Laplace operator, eigenvalues, eigenfunctions.*

DOI: 10.34121/1028-9763-2020-3-115-124

1. Вступ. Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій

Ще кілька років тому суперкомп’ютери були доступні в основному вченим із засекречених ядерних центрів і криптоаналітикам спецслужб. Однак розвиток апаратних і програмних засобів дозволив освоїти промисловий випуск таких машин, а число їх користувачів на даний час досягає десятків тисяч. Фактично в наші дні весь світ переживає справжній бум суперкомп’ютерних проектів, результатами яких активно користуються не тільки такі традиційні споживачі високих технологій, як аерокосмічна і автомобільна галузі промисловості, а й інші галузі сучасних наукових досліджень і інженерних розрахунків.

З одного боку, висока продуктивність, як правило, досягається за рахунок використання все більшого числа процесорних елементів. З іншого боку, зі зростанням їх числа і результуючої продуктивності суперкомп’ютера збільшується і загальне енергоспоживання. На поточний момент середнє значення енергоспоживання – 1 мегават електроенергії на кожен петафлопс продуктивності. Проблему зростання енергоспоживання супроводжує завдання охолодження гарячих компонентів суперкомп’ютера. Насправді, сумарне тепловиділення окремого суперкомп’ютера може досягати десятків МВт, і в такому випадку пошук рішення проблеми відведення тепла може стати зовсім нетривіальним завданням.

Очевидно, що від архітектури і ефективності системи охолодження гарячих компонентів суперкомп'ютера буде залежати надійність, живучість, а також оптимальний робочий режим експлуатації суперкомп’ютера.

Ось чому до числа проблем, що представляють великий теоретичний і практичний інтерес, відноситься проблема вивчення температурних полів, які виникають в елементах довільної конфігурації, охолодження суперкомп’ютера.

Для математичного моделювання температурних полів доцільно використовувати аналітичні методи, які дозволяють отримувати аналітичні рішення відповідних крайових задач, так як переваги використання аналітичних методів очевидні:

– незалежність обсягу обчислень від значень просторових і часових координат (як наслідок – відсутність накопичення систематичних розрахункових похибок);

– не викликає додаткових труднощів розрахунок потоків, середніх і локальних значень, балансних співвідношень, присутніх у будь-якій моделі;

– можливість використання часткових рішень, отриманих раніше;

– можливість використання уніфікованого набору задач для моделювання класу процесів у відповідному обладнанні;

– можливість аналізу і спрощення рішень для характерних і граничних значень параметрів процесу;

– наочність проміжних і кінцевих розрахункових результатів.

Для вирішення даного класу задач теплопровідності найбільш зручним виявився метод кінцевих інтегральних перетворень [1–2]. Теоретична можливість використання цього методу для знаходження температурних полів у тілах складної форми, просторові межі яких є складними функціями просторових координат, у спеціальній літературі з огляду на їх надмірну складність відсутня.

Мета статті – побудувати нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в довільній області, обмеженій декількома замкненими кусково-гладкими контурами, яке дозволяє досліджувати температурні поля в тілах складної форми, що виникають в елементах довільної конфігурації, охолодження суперкомп’ютера.

2. Викладення основного матеріалу дослідження

Нехай $D \subset R^2$ – обмежена область із замкнутим кусково-гладким контуром Г, а $\bar{n}$ – зовнішня одинична нормаль до Г.

Розглянемо інтегральне перетворення:

$$\bar{f}(\mu_k) = \iint\limits_{D} \varphi(x, y, \mu_k) \cdot \mathrm{f}(x, y) d\sigma, \tag{1}$$

де $\varphi(x, y, \mu_k)$, μ_k – власні функції і власні значення.

Класична проблема власних значень (ВЗ) і власних функцій (ВФ) формулюється як задача про визначення ВЗ μ_k і ВФ $\varphi(x, y, \mu_k)$, які тотожньо нерівні нулю в області D та задовольняють рівнянню

$$L[\varphi] + \mu_k \cdot \varphi = 0 \tag{2}$$

і граничній умові

$$\left. \left(\alpha \cdot \varphi + \beta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) \right|_{\Gamma} = 0, \tag{3}$$

де $L[\varphi] = \Delta\varphi = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа;

$\alpha, \beta \subset C(\Gamma)$; $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$; $\alpha + \beta > 0$;

$\varphi(x, y, \mu_n) \subset C^2(D) = \{u(x, y) \in C(D) : \partial_\alpha u(x, y) \in C(D),\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leq 2\}$;

$\partial_\alpha u(x, y) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u(x, y)}{\partial x^{\alpha_1}\ \partial x_2^{\alpha_2}}$;

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ – мультиіндекс, компоненти якого є цілі невід’ємні числа.

Виділяють три типи граничних умов. Гранична умова першого роду $(\alpha = 1,\ \beta = 0)$:

$$\varphi \big|_{\Gamma} = 0. \qquad (4)$$

Гранична умова другого роду $(\alpha = 0, \beta = 1)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \bigg|_{\Gamma} = 0. \qquad (5)$$

Гранична умова третього роду $(\alpha > 0,\ \beta = 1)$:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} + \alpha \cdot \varphi \right) \bigg|_{\Gamma} = 0. \qquad (6)$$

Таким чином, отримуємо три типи крайових задач. Вони називаються відповідно задачами Діріхле, Неймана і змішаної задачі. Можлива також задача, в якій на різних частинах межі ставляться різні граничні умови.

Теорема. Після застосування до оператора Лапласа $L[u]$ інтегрального перетворення (1) одержуємо вираз для зображення оператора Лапласа:

$$\bar{L}[u] = -\mu_k \cdot \bar{u} + \oint_{\Gamma} \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) dl, \qquad (7)$$

де Г – додатно орієнтований контур.

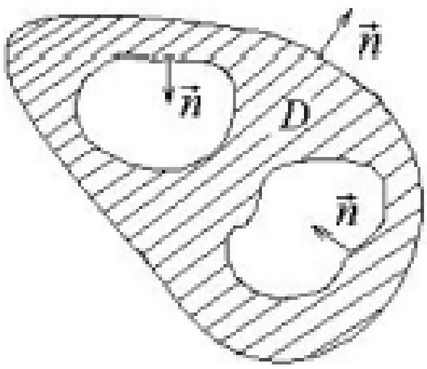

Рисунок 1 – Область D обмежена декількома замкненими кусково-гладкими контурами

Якщо область D обмежена декількома замкненими кусково-гладкими контурами, то інтеграл у (7) перетворюється на суму інтегралів по відповідних контурах. При цьому всі нормалі повинні бути зовнішніми по відношенню до області D (рис. 1).

Доведення. Відомо, що для всіх $v \in C^1(\Gamma) \cap C^2(D)$, $u \in C^1(\Gamma) \cap C^2(D)$ друга формула Гріна має вигляд [1]

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v) d\sigma = \oint_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) dl. \qquad (8)$$

Підставимо в формулу (8) замість v функцію ϕ і отримуємо

$$\int_D (\varphi\Delta u - u\Delta \varphi) d\sigma = \oint_{\Gamma} \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) dl. \qquad (9)$$

Із формули (2) маємо

$$\Delta \phi = -\mu_k \cdot \phi. \qquad (10)$$

Підставляючи значення $\Delta \phi$ із (10) в (9), отримаємо

$$\int_D (\varphi \cdot \Delta u + \mu_k u \cdot \varphi) d\sigma = \oint_{\Gamma} \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) dl. \qquad (11)$$

Враховуючи у формулі (11) позначення (1), отримаємо (7).

Формула оберненого перетворення має вигляд [1]

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(x,y,\mu_k)}{\left\|\varphi(x,y,\mu_k)\right\|^2}\bar{u}(\mu_k)\,. \quad (12)$$

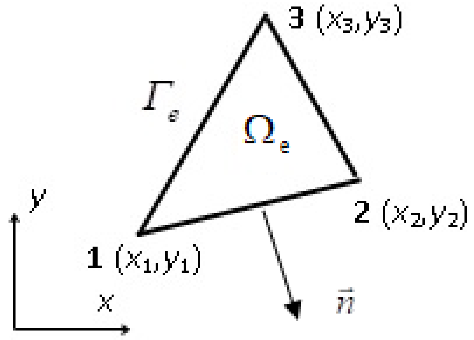

Рисунок 2 – Трикутний елемент першого порядку

Знайдемо ВЗ μ_k і ВФ $\phi(x,y,\mu_k)$ із розв'язку задачі (2)–(3) за допомогою методу скінченних елементів у формі Гальоркіна для симплекс елементів першого порядку. Для цього зробимо розбиття області на симплекс елементи (рис. 2).

Тоді функція $\phi_e(x,y)$ в середині симплекс елемента виражається через функції форми N_1, N_2 и N_3 із відомими значеннями ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 у вершинах трикутника [3]:

$$\phi_e(x,y)=N_1\phi_1+N_2\phi_2+N_3\phi_3=[N_e]^T\{\phi_e\},$$

де $[N_e]=[N_1,N_2,N_3]^T$, $\{\phi_e\}=\{\phi_1,\phi_2,\phi_3\}^T$, нижній індекс (е) означає довільний симплекс елемент.

ВЗ μ_k і ВФ $\phi(x,y,\mu_k)$ задачі (2)–(3) знаходяться за формулами, приведеними в [4], з урахуванням граничних умов (4), (5), (6) відповідно.

Для перевірки працездатності нового інтегрального перетворення проведемо розрахунки розв'язків крайової задачі для рівняння Лапласа, отриманих за допомогою розробленого нового інтегрального перетворення (1) і відомого аналітичного розв'язку [2].

Знайдемо розв'язок рівняння Лапласа (2) у прямокутній області $D=\{(x,y):0<x<a,\ 0<y<b\}$ з граничними умовами на границі:

$$u(0,y)=V,u(a,y)=u(x,b)=u(x,0)=0\,. \quad (13)$$

Розв'язується така задача методом відокремлення змінних (метод Фур'є). Згідно з [2], розв'язок має вигляд

$$u(x,y)=\frac{4V}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\left[\dfrac{(2k+1)(a-x)\pi}{b}\right]\sin\left[\dfrac{(2k+1)\pi y}{b}\right]}{(2k+1)\mathrm{sh}\left[\dfrac{(2k+1)\pi a}{b}\right]}, \quad (14)$$

де $\mathrm{sh(x)}=\dfrac{\mathrm{e}^x-e^{-x}}{2}$ – гіперболічний синус.

Знайдемо розв'язок крайової задачи (2), (13) за допомогою інтегрального перетворення (1). Застосовуючи до крайової задачі (2), (13) інтегральне перетворення (1) згідно з (7), одержуємо

$$\bar{L}[u]=-\mu_k\cdot\bar{u}+\oint_{\Gamma}\left(\varphi\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)dl. \quad (15)$$

ВЗ μ_k і ВФ $\varphi(x,y,\mu_k)$ задовольняють рівнянню (2) і граничній умові

$$\varphi(0,y)=0,\varphi(a,y)=\varphi(x,b)=\varphi(x,0)=0\,. \quad (16)$$

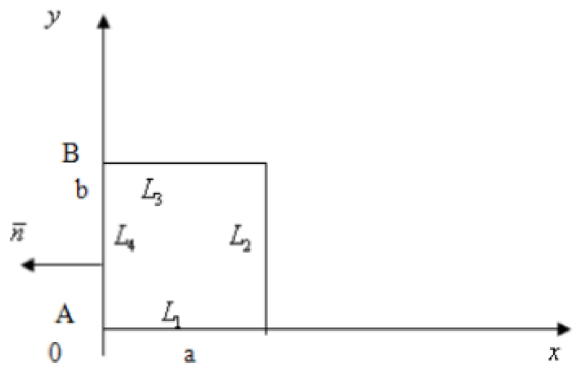

Рисунок 3 – Область рішень

Враховуючи (16) рівняння для трансформанти (15) запишеться у вигляді

$$-\mu_k \cdot \bar{u} + \oint_{\Gamma} u \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} dl = 0. \qquad (17)$$

На рис. 3 позначимо кожну зі сторін: L_1, L_2, L_3, L_4.

Згідно з умовою задачі, похідна від функції у напрямку нормалі на ділянки L_4 обчислюється за формулою [1]

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{L_4} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos 180^\circ + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos 90^\circ = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=U_0} = -\varphi_x(0, y). \qquad (18)$$

Враховуючи (18), рішення (17) запишеться так:

$$\bar{u} = \frac{V}{\mu_k} \cdot \int_{BA} \frac{\partial \phi}{\partial x} dl. \qquad (19)$$

Обчислимо інтеграл

$$\int_{BA} \frac{\partial \phi}{\partial x} dl = \sum_e \int_e \frac{\partial \phi_e}{\partial x} dy,$$

де e-сторона граничного симплекс елемента, що знаходиться на відрізку ВА, і інтегрування відбувається в напрямку ВА. Враховуючи позначення [3], маємо

$$\int_{BA} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dl = \sum_e \int_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} dy = \sum_e \int_e [\varphi_i b_i + \varphi_j b_j + \varphi_k b_k] dy, \qquad (20)$$

де $b_i = -\frac{y_k - y_j}{2S_e}$; $b_j = \frac{y_k - y_i}{2S_e}$; $b_k = \frac{y_i - y_j}{2S_e}$.

i, j, k – послідовна нумерація вузлів симплекс елемента при обході їх проти годинникової стрілки.

Так як інтегрування відбувається по одній стороні ВА, то із (20) одержуємо

$$\sum_e \int_e [\varphi_i b_i + \varphi_j b_j + \varphi_k b_k] dy = \sum_e \Theta_k^e,$$

де $\Theta_k^e = [\varphi_i b_i + \varphi_j b_j + \varphi_k b_k] \int_e dy_e$.

Для обчислення значення інтеграла $\int_e dy_e$, розглянемо три випадки розташування сторони граничного симплекс елемента на стороні ВА.

1 випадок.

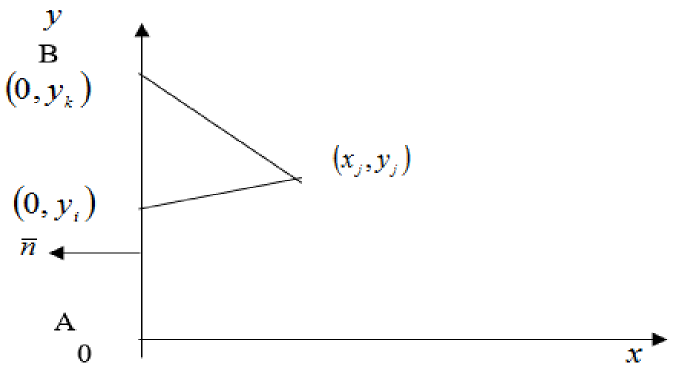

Рисунок 4 – Координати вершин граничного симплекс елемента на стороні ВА

Згідно з рис. 4, маємо

$$\Theta_k^e = [\varphi_i b_i + \varphi_j b_j + \varphi_k b_k] \int\limits_e dy_e = \frac{\varphi_j}{2S_e} (y_k - y_i)^2 . \tag{21}$$

2 випадок.

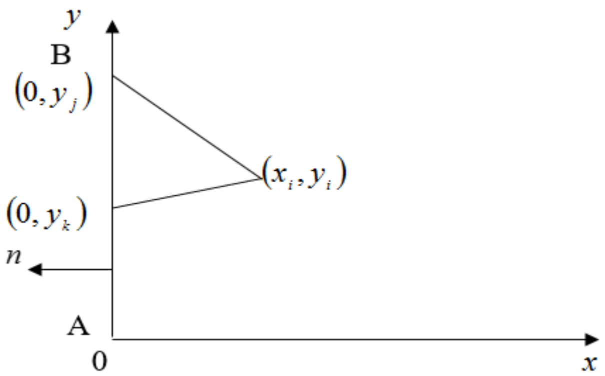

Рисунок 5 – Координати вершин граничного симплекс елемента на стороні ВА

Згідно з рис. 5, маємо

$$\Theta_k^e = [\varphi_i b_i + \varphi_j b_j + \varphi_k b_k] \int\limits_e dy_e = \frac{\varphi_i}{2S_e} (y_j - y_k)^2 . \tag{22}$$

3 випадок.

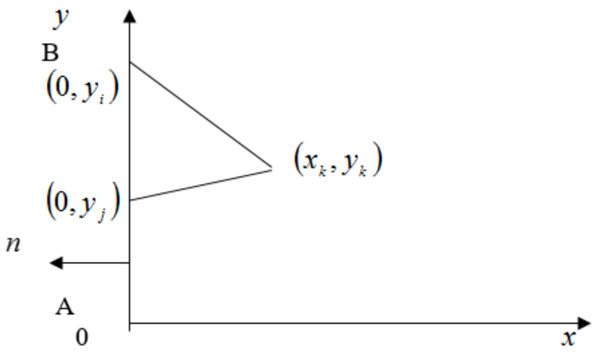

Рисунок 6 – Координати вершин граничного симплекс елемента на стороні ВА

Згідно з рис. 6, маємо

$$\Theta_k^e = [\phi_i b_i + \phi_j b_j + \phi_k b_k]\int_e dy_e = \frac{\phi_k}{2S_e}(y_i - y_j)^2. \quad (23)$$

Таким чином, враховуючи (21)–(23), одержуємо

$$\Theta_k^e = \frac{1}{2S_e}\begin{cases} \varphi_j (y_k - y_i)^2, & \text{де} \quad x_k = x_i = 0, \\ \varphi_i (y_j - y_k)^2, & \text{де} \quad x_j = x_k = 0, \\ \varphi_k (y_i - y_j)^2, & \text{де} \quad x_i = x_j = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Враховуючи (24), формула (20) запишеться у вигляді

$$\bar{u} = \frac{V}{\mu_k} \cdot \int_{BA} \frac{\partial \phi}{\partial x} dl = \frac{V}{\mu_k} \cdot \sum_e \Theta_k^e \cdot \quad (25)$$

Згідно з формулою оберненого перетворення (12), розв’язок запишеться у вигляді

$$u(x,y) = V \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(x,y,\mu_k) \cdot \sum_e \Theta_k^e}{\mu_k \cdot \|\varphi(x,y,\mu_k)\|^2} . \quad (26)$$

У розв'язку (26) знайдемо квадрат норми. Відомо [1], що квадрат норми обчислюється за формулою

$$\|\varphi(x,y,\mu_k)\|^2 = \iint_D \varphi^2(x,y,\mu_k) d\sigma. \quad (27)$$

Підсумовування по всіх елементах у (27) дає

$$\iint_D \phi^2(x,y,\mu_k) d\sigma = \sum_e \iint_e \phi_e^2(x,y) dxdy. \quad (28)$$

Отже, маємо

$$\sum_e \iint_e \phi_e^2(x,y)dxdy = \sum_e \iint_e [\phi_1^2 N_1^2 + \phi_2^2 N_2^2 + \phi_3^2 N_3^2 + 2\phi_1\phi_2 N_1 N_2 + 2\phi_1\phi_3 N_1 N_3 +$$

$$+ 2\phi_2\phi_3 N_2 N_3]dxdy = \sum_e [\phi_1^2 \iint_e N_1^2 dxdy + \phi_2^2 \iint_e N_2^2 dxdy + \phi_3^2 \iint_e N_3^2 dxdy +$$

$$+ 2\phi_1\phi_2 \iint_e N_1 N_2 dxdy + 2\phi_1\phi_3 \iint_e N_1 N_3 dxdy + 2\phi_2\phi_3 \iint_e N_2 N_3 dxdy].$$

Використовуючи для координат площі формули інтегрування [3], одержуємо

$$\iint_D \phi^2(x,y,\mu_k) d\sigma = \frac{1}{6} \sum_e [\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_1\phi_2 + \phi_1\phi_3 + \phi_2\phi_3] \cdot S_e , \quad (29)$$

де $S_e = \frac{1}{2}[(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$ – площа трикутного елемента.

При підставленні в (26) знайденого значення квадрата норми ВФ (29) формула оберненого перетворення при використанні симплекс елементів першого порядку приймає вигляд

$$u(x,y)=6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi(x,y,\mu_k)\cdot\bar{u}(\mu_k)}{\sum_e[\phi_1^2+\varphi_2^2+\phi_3^2+\phi_1\phi_2+\phi_1\phi_3+\phi_2\phi_3]\cdot S_e}. \quad (30)$$

Згідно з одержаною формулою оберненого перетворення (30), а також, враховуючи (25), одержуємо шуканий розв’язок:

$$u(x,y)=6\cdot V\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\phi(x,y,\mu_k)\cdot\sum_e\Theta_k^e}{\mu_k\sum_e[\phi_1^2+\varphi_2^2+\phi_3^2+\phi_1\phi_2+\phi_1\phi_3+\phi_2\phi_3]\cdot S_e}. \quad (31)$$

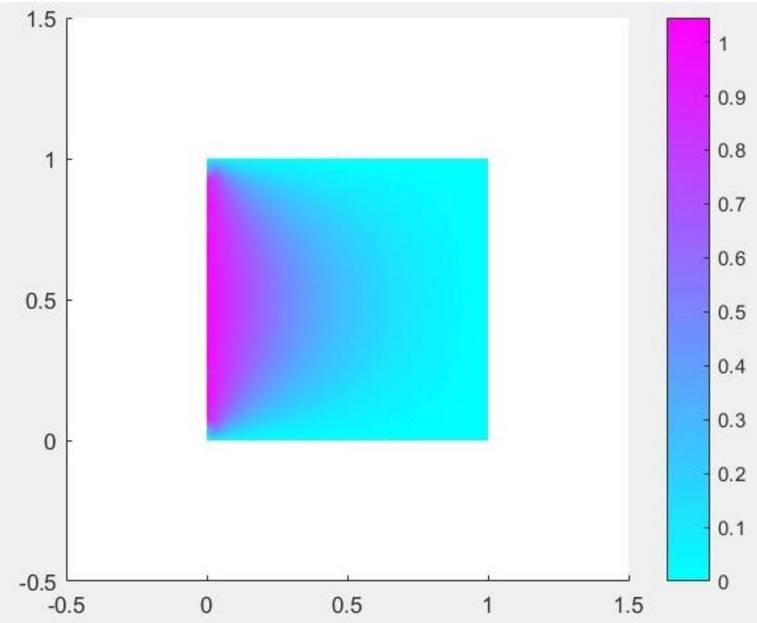

Рисунок 7 – Результати розрахунку аналітичного розв’язку $u(x,y)$ рівняння Лапласа за формулою (14)

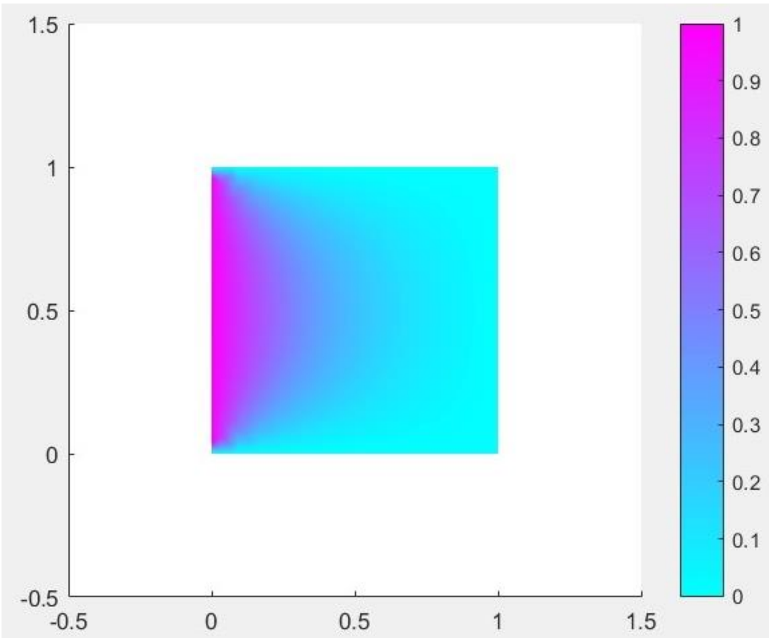

Рисунок 8 – Результати розрахунку розв’язку $u(x,y)$ рівняння Лапласа, одержаного за допомогою нового інтегрального перетворення (1) за формулою (31)

На рис. 7, 8 представлено результати розрахунку розв'язку рівняння Лапласа у випадку квадрата із довжиною сторін, рівною одиниці при $V=1$, для аналітичного розв'язку за формулою (14) і за отриманим розв'язком (31), одержаним за допомогою нового інтегрального перетворення (1).

Ці результати були отримані для 228 симплекс елементів першого порядку і 135 вузлів. Максимальне відхилення по модулю цих рішень становить 0,096, математичне сподівання відхилень – 0,009 , а дисперсія відхилень – 0,001.

3. Висновки

Вперше побудовано нове кінцеве інтегральне перетворення для рівняння Лапласа в довільній області, обмеженій декількома замкненими кусково-гладкими контурами. Наводиться формула оберненого перетворення.

Знаходження ядра побудованого нового кінцевого інтегрального перетворення для рівняння Лапласа методом скінченних елементів у формі Гальоркіна для симплекс елементів першого порядку зводиться до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь.

Представлені результати порівняння розрахунків розв'язку рівняння Лапласа у випадку квадрата із довжиною сторін, рівною одиниці, з відомим аналітичним розв'язком за формулою (14) і отриманим розв'язком (31), одержаним за допомогою нового інтегрального перетворення (1). Ці результати були отримані для 228 симплекс елементів першого порядку і 135 вузлів. Максимальне відхилення по модулю цих рішень становить 0,096, математичне сподівання відхилень – 0,009, а дисперсія відхилень – 0,001.

Розроблене інтегральне перетворення дає можливість отримати рішення складних крайових задач у математичній фізиці.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Галицын А.С., Жуковский А.И. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. Киев: Наукова думка, 1979. 561 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 409 с.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
4. Бердник М.Г. Математичне моделювання температурних полів у довільних областях при електронно-променевому зварюванні. *Искусственный интеллект*. 2018. № 2. С. 77−82.

Стаття надійшла до редакції 30.07.2020