https://orcid.org/0000-0002-7284-6502

УДК 528.06

С.І. АЛЬПЕРТ*

ОСНОВНІ АРИФМЕТИЧНІ ОПЕРАЦІЇ З НЕЧІТКИМИ ЧИСЛАМИ ТА НОВІТНІ ПІДХОДИ ДО ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ПРИ КЛАСИФІКУВАННІ КОСМІЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

*Науковий Центр аерокосмічних досліджень Землі ІГН НАН України, м. Київ, Україна

Анотація. *Класифікування в дистанційному зондуванні є дуже складною процедурою, оскільки воно містить у собі багато етапів та попередню обробку даних. Теорія нечітких множин відіграє важливу роль у задачах класифікування, тому що цей підхід дає змогу охопити структуру зображення. Більшість понять є нечіткими за своєю природою. Нечіткі множини можуть працювати з невизначеними та неточними даними. Багато задач класифікування формуються з використанням нечітких понять, оскільки чіткі класи надають спрощену картину реальності, що може призвести до невірних результатів класифікування. Теорія нечітких множин є важливим математичним інструментом для обробки складних та нечітких даних. Ця теорія підходить для класифікування зображень із високим розрізненням, отриманих за допомогою дистанційного зондування. Нечіткі множини та нечіткі числа використовуються для знаходження базових мас. Нечіткі числа застосовуються для визначення оптимального числа кластерів у методах нечіткої кластеризації. У деяких задачах класифікування зображення представляється у вигляді нечіткого графа, в якому знаходяться розбіжності між пікселями. Нечіткі множини також застосовуються в різноманітних задачах із попередньої обробки цифрових оптичних зображень. Було зазначено, що нечіткі множини відіграють важливу роль в аналізі результатів класифікування з використанням мір погодження між завірковими даними та кінцевим результатом класифікування. В даній роботі були розглянуті арифметичні операції над нечіткими числами з використанням методу альфа-зрізів. У статті описані операції додавання, віднімання, множення, ділення нечітких чисел та взяття кореня квадратного з нечіткого числа. Також були наведені приклади різних арифметичних операцій над нечіткими числами. Теорія нечітких множин та нечіткі числа можуть бути застосовані при аналізі та класифікуванні гіперспектральних космічних зображень, вирішенні екологічних задач, при пошуку корисних копалин.*

Ключові слова: *теорія нечітких множин, класифікування зображень, нечітке число, альфа-зріз, нечітка арифметика.*

Аннотация. *Классификация в дистанционном зондировании является очень сложной процедурой, поскольку она включает в себя много этапов и предварительную обработку данных. Теория нечетких множеств играет важную роль в задачах классификации, потому что данный подход дает возможность охватить структуру изображения. Большинство понятий являются нечеткими по своей природе. Нечеткие множества могут работать с неопределенными и неточными данными. Много задач классификации формируются с использованием нечетких понятий, поскольку четкие классы дают упрощенную картину реальности, что может привести к неверным результатам классификации. Теория нечетких множеств является важным математическим инструментом для обработки сложных и нечетких данных. Эта теория подходит для классификации изображений с высоким разрешением, полученных с помощью дистанционного зондирования. Нечеткие множества и нечеткие числа используются для нахождения базовых масс. Нечеткие числа используются для определения оптимального числа кластеров в методах нечеткой кластеризации. В некоторых задачах классификации изображения представляются в виде нечеткого графа, в котором находятся различия между пикселями. Нечеткие множества используются в разных задачах по предварительной обработке цифровых оптических изображений. Было отмечено, что нечеткие множества играют важную роль в анализе результатов классификации с использованием мер согласования между заверочными данными и конечным результатом классификации. В данной работе были рассмотрены арифметические операции над нечеткими числами с использованием метода альфа-срезов. В статье описаны операции сложения, вычитания, умножения, деления нечетких чисел и взятие корня квадратного из нечеткого числа. Также были приведены примеры разных арифметических операций над нечеткими числами. Теория нечетких множеств и нечеткие*

числа могут быть использованы при анализе и классификации гиперспектральных космических изображений, решении экологических задач, поиске полезных ископаемых.
Ключевые слова: *теория нечетких множеств, классификация изображений, нечеткое число, альфа-срез, нечеткая арифметика.*

Abstract. *Classification in remote sensing is a very difficult procedure, because it involves a lot of steps and data preprocessing. Fuzzy Set Theory plays a very important role in classification problems, because the fuzzy approach can capture the structure of the image. Most concepts are fuzzy in nature. Fuzzy sets allow to deal with uncertain and imprecise data. Many classification problems are formalized by using fuzzy concepts, because crisp classes represent an oversimplification of reality, leading to wrong results of classification. Fuzzy Set Theory is an important mathematical tool to process complex and fuzzy data. This theory is suitable for high resolution remote sensing image classification. Fuzzy sets and fuzzy numbers are used to determine basic probability assignment. Fuzzy numbers are used for detection of the optimal number of clusters in Fuzzy Clustering Methods. Image is modeled as a fuzzy graph, when we represent the dissimilitude between pixels in some classification tasks. Fuzzy sets are also applied in different tasks of processing digital optical images. It was noted, that fuzzy sets play an important role in analysis of results of classification, when different agreement measures between the reference data and final classification are considered. In this work arithmetic operations of fuzzy numbers using alpha-cut method were considered. Addition, subtraction, multiplication, division of fuzzy numbers and square root of fuzzy number were described in this paper. Moreover, it was illustrated examples with different arithmetic operations of fuzzy numbers. Fuzzy Set Theory and fuzzy numbers can be applied for analysis and classification of hyperspectral satellite images, solving ecological tasks, vegetation classification, in remote searching for minerals.*
Keywords: *Fuzzy Set Theory, image classification, fuzzy number, alpha-cut, fuzzy arithmetic.*

DOI: 10.34121/1028-9763-2020-3-49-59

1. Вступ

Теорія нечітких множин, запропонована Л.А. Заде у 1965 році, знайшла широке застосування у багатьох різноманітних галузях наукових досліджень, а саме: у розпізнаванні та класифікуванні космічних зображень, кластерному аналізі, при оцінці точності результатів класифікування, в задачах обробки цифрових оптичних зображень.

Теорія нечітких множин дає змогу оперувати з неповною, неточною та невизначеною інформацією. Нечіткі множини та нечіткі числа також використовуються для визначення базових мас, які, у свою чергу, застосовуються при вирішенні задач класифікування. Базові маси вказують, до якого саме класу найбільш імовірно відноситься об'єкт, який класифікується. Теорія нечітких чисел також використовується у методах нечіткої кластеризації. Слід зауважити, що використання теорії нечітких множин при розпізнаванні супутникових зображень, засноване на тому, що більшість реальних класів є розмитими та нечіткими за своєю природою, тобто перехід від належності до неналежності об'єктів до даних класів є поступовим. Тому досить багато задач оперують саме нечіткими поняттями. При вирішенні задач класифікування часто доцільним є використання саме теорії нечітких множин, оскільки чіткі класи представляють спрощену картину, що не відповідає реальності та може призвести до невірних результатів класифікування. Тому саме теорія нечітких множин відіграє важливу роль при розв'язанні задач класифікування супутникових зображень, оскільки дозволяє визначити нестатистичну неточність при визначенні класів [1–3].

Метою даної статті є розгляд та аналіз основних арифметичних операцій над нечіткими множинами, такими як додавання, віднімання, ділення, множення та визначення квадратного кореня за допомогою методу α -зрізів. У даній роботі будуть детально описані числові приклади.

2. Основні положення теорії нечітких множин

Досить часто при розв'язанні задач класифікування маємо справу з неповною, неточною та суперечливою інформацією. Теорія нечітких множин [4–6] дає змогу описувати, обробляти та встановлювати взаємозв'язки між неточними даними. Наведемо основні поняття та означення з теорії нечітких множин. Нехай X – універсальна множина. Нечітка підмножина $A \subset X$ визначається за допомогою характеристичної функції

$$\mu_A : X \to [0,1]. \tag{1}$$

При цьому кожному елементу $x \in A$ надається дійсне значення характеристичної функції $\mu_A(x)$ з інтервалу [0,1]. Значення $\mu_A(x)$ вказує на вагу (grade of membership) елемента x у множині A. Нехай маємо нечітку множину $A \subset X$ та будь-яке дійсне число $\alpha \in [0,1]$. Тоді α – рівень або α – зріз, що відповідає множині A, позначається ${}^{\alpha}A$ та є чіткою множиною:

$${}^{\alpha}A = \left\{ x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha \right\}. \tag{2}$$

Центральний елемент описується за допомогою α-зрізу таким чином:

$${}^{\alpha}A_i = \left\{ x : \mu_A(x) \geq \alpha_i \right\} = \left[{}^{\alpha}A_{i_{lower}}, {}^{\alpha}A_{i_{upper}} \right], \quad (i = 1, 2, 3, ..., n), \quad \alpha_0 = 1 > \alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_n = 0, \quad \alpha \in [0,1]. \tag{3}$$

Трикутне нечітке число A визначається через трійку чисел $[a, b, c]$. Його характеристична функція має вигляд

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b, \\ \dfrac{c-x}{c-b}, b \leq x \leq c. \end{cases} \tag{4}$$

де a – мінімальне значення, b – найбільш вірогідне значення, c – максимальне значення. Для знаходження α-зрізу множини A спочатку покладемо, що $\alpha \in [0,1]$.

Тоді маємо

$$\alpha = \frac{x-a}{b-a}, \quad \alpha = \frac{c-x}{c-b}. \tag{5}$$

Із виразу (5) виражаємо x через α:

$$\begin{aligned} &x - a = \alpha(b-a), \\ &x = (b-a)\alpha + a - \text{ перша границя інтервалу,} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &c - x = \alpha(c-b), \\ &x = c - (c-b)\alpha - \text{друга границя інтервалу.} \end{aligned}$$

Із виразу (6) отримуємо α-зріз множини A:

$${}^{\alpha}A = \left[b-a)\alpha + a,\ c - (c-b)\alpha \right]. \tag{7}$$

3. Арифметичні операції над нечіткими числами з застосуванням методу α -зрізів

3.1. Додавання нечітких чисел

Нехай $X=[a,b,c]$ та $Y=[p,q,r]$ – нечіткі числа, характеристичні функції яких визначаються за такими формулами відповідно:

$$\mu_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b,\\ \dfrac{c-x}{c-b}, b\le x\le c,\end{cases}\qquad \mu_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{x-p}{q-p}, p\le x\le q,\\ \dfrac{r-x}{r-q}, q\le x\le r.\end{cases}\tag{8}$$

Тоді α -зрізи нечітких чисел X та Y визначаються з формули (8) таким чином:

$${}^{\alpha}X=\left[(b-a)\alpha+a,\ c-(c-b)\alpha\right],\quad {}^{\alpha}Y=\left[(q-p)\alpha+p,\ r-(r-q)\alpha\right].\tag{9}$$

Для підрахунку суми нечітких чисел X та Y обчислюємо суму α -зрізів даних нечітких чисел X та $Y,$ використовуючи інтервальну арифметику:

$$\begin{aligned}{}^{\alpha}X+{}^{\alpha}Y&=\left[(b-a)\alpha+a,\ c-(c-b)\alpha\right]+\left[(q-p)\alpha+p,\ r-(r-q)\alpha\right]=\\&=\left[a+p+(b-a+q-p)\alpha,\ c+r-(c-b+r-q)\alpha\right].\end{aligned}\tag{10}$$

Тепер для знаходження характеристичної функції $\mu_{X+Y}(x)$ прирівнюємо до x ліву та праву границі інтервалу з виразу (10). Маємо

$$x=a+p+(b-a+q-p)\alpha,\quad x=c+r-(c+r-b-q)\alpha.\tag{11}$$

Далі виражаємо α через x, покладаючи, що $\alpha=0$ та $\alpha=1$ у виразі (10):

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{x-(a+p)}{(b+q)-(a+p)},\ (a+p)\le x\le(b+q),\\ \alpha&=\frac{(c+r)-x}{(c+r)-(b+q)},\ (b+q)\le x\le(c+r).\end{aligned}\tag{12}$$

З виразу (12) отримуємо характеристичну функцію суми двох нечітких чисел X та Y:

$$\mu_{X+Y}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-(a+p)}{(b+q)-(a+p)},\ (a+p)\le x\le(b+q),\\ \dfrac{(c+r)-x}{(c+r)-(b+q)},\ (b+q)\le x\le(c+r).\end{cases}\tag{13}$$

3.2. Віднімання нечітких чисел

Нехай маємо $X=[a,b,c]$ та $Y=[p,q,r]$ – нечіткі числа, характеристичні функції яких визначаються за формулами (8), а їх α -зрізи визначаються за формулами (9). Для підрахунку різниці нечітких чисел X та Y обчислюємо різницю α -зрізів даних нечітких чисел X та $Y,$ використовуючи інтервальну арифметику:

$$\begin{aligned}{}^{\alpha}X-{}^{\alpha}Y&=\left[(b-a)\alpha+a,\ c-(c-b)\alpha\right]-\left[(q-p)\alpha+p,\ r-(r-q)\alpha\right]=\\&=\left[(b-a)\alpha+a-(r-(r-q)\alpha),\ c-(c-b)\alpha-((q-p)\alpha+p)\ \right]=\\&=\left[(a-r)+(b-a+r-q)\alpha,\ (c-p)-(c-b+q-p)\alpha\ \right].\end{aligned}\tag{14}$$

Далі для знаходження характеристичної функції $\mu_{X-Y}(x)$ прирівнюємо до x ліву та праву границі інтервалу з виразу (14). Маємо

$$\begin{aligned} x &= (a-r)+(b-a+r-q)\alpha, \\ x &= (c-p)-(c-b+q-p)\alpha. \end{aligned} \tag{15}$$

Виражаємо α через x, покладаючи, що $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ у виразі (14):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x-(a-r)}{(b-q)-(a-r)},\ (a-r) \le x \le (b-q), \\ \alpha &= \frac{(c-p)-x}{(c-p)-(b-q)},\ (b-q) \le x \le (c-p). \end{aligned} \tag{16}$$

З виразу (16) отримуємо характеристичну функцію різниці двох нечітких чисел X та Y:

$$\mu_{X-Y}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-(a-r)}{(b-q)-(a-r)},\ (a-r) \le x \le (b-q), \\ \dfrac{(c-p)-x}{(c-p)-(b-q)},\ (b-q) \le x \le (c-p). \end{cases} \tag{17}$$

3.3. Множення нечітких чисел

Візьмемо $X = [a,b,c]$ та $Y = [p,q,r]$ – нечіткі числа, характеристичні функції яких визначаються за формулами (8), а їх α-зрізи визначаються за формулами (9).

Для розрахунку добутку нечітких чисел X та Y спочатку знайдемо добуток α-зрізів даних нечітких чисел X та Y, використовуючи інтервальну арифметику:

$$\begin{aligned} &{}^{\alpha}X * {}^{\alpha}Y = \left[(b-a)\alpha + a,\ c-(c-b)\alpha\right] * \left[(q-p)\alpha + p,\ r-(r-q)\alpha\right] = \\ &= \left[((b-a)\alpha + a)*((q-p)\alpha + p),\ (c-(c-b)\alpha)*(r-(r-q)\alpha)\ \right] = \\ &= \left[\ (b-a)(q-p)\alpha^2 + (b-a)\alpha p + a(q-p)\alpha + ap,\ cr - c(r-q)\alpha - (c-b)\alpha r + (c-b)(r-q)\alpha^2 \right] = \\ &= \left[\ (b-a)(q-p)\alpha^2 + ((b-a)p + (q-p)a)\alpha + ap,\ (c-b)(r-q)\alpha^2 - ((r-q)c + (c-b)r)\alpha + cr \right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Далі для знаходження характеристичної функції $\mu_{XY}(x)$ прирівнюємо до x ліву та праву границі інтервалу з виразу (18). Отримуємо

$$\begin{aligned} x &= (b-a)(q-p)\alpha^2 + ((b-a)p + (q-p)a)\alpha + ap, \\ x &= (c-b)(r-q)\alpha^2 - ((r-q)c + (c-b)r)\alpha + cr. \end{aligned} \tag{19}$$

Виражаємо α через x, покладаючи, що $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ у виразі (18). Для цього вираз (19) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} &(b-a)(q-p)\alpha^2 + ((b-a)p + (q-p)a)\alpha + (ap - x) = 0, \\ &(c-b)(r-q)\alpha^2 - ((r-q)c + (c-b)r)\alpha + (cr - x) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Вираз (20) містить два квадратні рівняння, які ми розв’язуємо відносно α:

$$\alpha = \frac{-((b-a)p + q - p)a) + \sqrt{((b-a)p + (q-p)a)^2 - 4(b-a)(q-p)(ap-x)}}{2(b-a)(q-p)},\ ap \le x \le bq, \tag{21}$$

$$\alpha = \frac{((r-q)c+(c-b)r)-\sqrt{((r-q)c+(c-b)r)^2-4(c-b)(r-q)(cr-x)}}{2(c-b)(r-q)}, \; bq \le x \le cr.$$

З виразу (21) отримуємо характеристичну функцію добутку двох нечітких чисел X та Y:

$$\mu_{XY}(x) = \begin{cases} \dfrac{-((b-a)p+q-p)a)+\sqrt{((b-a)p+q-p)a^2)-4(b-a)(q-p)(ap-x)}}{2(b-a)(q-p)}, \; ap \le x \le bq, \\ \dfrac{((r-q)c+(c-b)r)-\sqrt{((r-q)c+(c-b)r^2)-4(c-b)(r-q)(cr-x)}}{2(c-b)(r-q)}, \; bq \le x \le cr. \end{cases} \tag{22}$$

3.4. Ділення нечітких чисел

Припустимо, що маємо $X=[a,b,c]$ та $Y=[p,q,r]$ – нечіткі числа, характеристичні функції яких визначаються за формулами (8), а їх α-зрізи визначаються за формулами (9). Для підрахунку частки нечітких чисел X та Y обчислюємо частку α-зрізів даних нечітких чисел X та Y, використовуючи інтервальну арифметику:

$$\frac{{}^{\alpha}X}{{}^{\alpha}Y} = \frac{[(b-a)\alpha+a,\; c-(c-b)\alpha]}{[(q-p)\alpha+p,\; r-(r-q)\alpha]} = \left[\frac{(b-a)\alpha+a}{r-(r-q)\alpha},\; \frac{c-(c-b)\alpha}{(q-p)\alpha+p}\right]. \tag{23}$$

Для знаходження характеристичної функції $\mu_{X/Y}(x)$ прирівнюємо до x ліву та праву границі інтервалу з виразу (23). Отримуємо

$$x = \frac{(b-a)\alpha+a}{r-(r-q)\alpha}, \quad x = \frac{c-(c-b)\alpha}{(q-p)\alpha+p}. \tag{24}$$

Виражаємо α через x, покладаючи, що $\alpha=0$ та $\alpha=1$ у виразі (23). Для цього перше рівняння (24) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} &x\cdot\left[r-(r-q)\alpha\right] = (b-a)\alpha+a, \\ &xr - x(r-q)\alpha = (b-a)\alpha+a. \end{aligned} \tag{25}$$

Тоді
$$\alpha = \frac{xr-a}{x(r-q)+(b-a)}, \quad a/r \le x \le b/q. \tag{26}$$

Тепер аналогічним чином отримуємо для другого рівняння (24):

$$\begin{aligned} &x\cdot\left[(q-p)\alpha+p\right] = c-(c-b)\alpha, \\ &x(q-p)\alpha + xp = c-(c-b)\alpha. \end{aligned} \tag{27}$$

Тоді
$$\alpha = \frac{c-px}{(c-b)+(q-p)x}, \quad b/q \le x \le c/p. \tag{28}$$

З виразів (26) та (28) отримуємо характеристичну функцію частки двох нечітких чисел X та Y:

$$\mu_{X/Y}(x)=\begin{cases}\dfrac{xr-a}{(b-a)+(r-q)x}, & a/r\le x\le b/q,\\ \dfrac{c-px}{(c-b)+(q-p)x}, & b/q\le x\le c/p.\end{cases} \tag{29}$$

3.5. Квадратний корінь із нечіткого числа

Нехай маємо $X=[a,b,c]>0$ – нечітке число, характеристична функція якого обчислюється за формулою (8), а його α -зріз визначається за формулою (9). Для підрахунку квадратного кореня із нечіткого числа X обчислюємо квадратний корінь із α -зрізу нечіткого числа X, використовуючи інтервальну арифметику:

$$\sqrt{{}^{\alpha}X}=\sqrt{\left[(b-a)\alpha+a,\, c-(c-b)\alpha\right]}=\left[\sqrt{(b-a)\alpha+a},\ \sqrt{c-(c-b)\alpha}\ \right]. \tag{30}$$

Для знаходження характеристичної функції $\mu_{\sqrt{X}}(x)$ прирівнюємо до x ліву та праву границі інтервалу з виразу (30). Отримуємо

$$x=\sqrt{(b-a)\alpha+a}\,,\quad x=\sqrt{c-(c-b)\alpha}. \tag{31}$$

Виражаємо α через $x,$ покладаючи, що $\alpha=0$ та $\alpha=1$ у виразі (30). Для цього ліву і праву частини першого та другого рівнянь (31) треба піднести до квадрату:

$$\begin{aligned} &x=\sqrt{(b-a)\alpha+a}\,, && x=\sqrt{c-(c-b)\alpha},\\ &x^2=(b-a)\alpha+a, && x^2=c-(c-b)\alpha,\\ &\alpha=\frac{x^2-a}{b-a}, && \alpha=\frac{c-x^2}{c-b}.\end{aligned} \tag{32}$$

З виразу (32) отримуємо характеристичну функцію квадратного кореня з нечіткого числа X:

$$\mu_{\sqrt{X}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-a}{b-a}, & \sqrt{a}\le x\le\sqrt{b},\\ \dfrac{c-x^2}{c-b}, & \sqrt{b}\le x\le\sqrt{c}.\end{cases} \tag{33}$$

4. Приклади

Нехай $X=[2,3,5]$ та $Y=[4,6,8]$ – два нечітких числа, чиї характеристичні функції, згідно з формулою (4), визначаються таким чином:

$$\mu_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{3-2}, 2\le x\le 3,\\ \dfrac{5-x}{5-3}, 3\le x\le 5,\end{cases}\qquad \mu_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{x-4}{6-4}, 4\le x\le 6,\\ \dfrac{8-x}{8-6}, 6\le x\le 8\end{cases}$$

або
$$\mu_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}, 2\le x\le 3,\\ \dfrac{5-x}{2}, 3\le x\le 5,\end{cases}\qquad \mu_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{x-4}{2}, 4\le x\le 6,\\ \dfrac{8-x}{2}, 6\le x\le 8,\end{cases}$$

Тоді α -зрізи нечітких чисел X та Y визначаються за формулою (9):

$$^{\alpha}X = \left[2+\alpha,\ 5-2\alpha\right], \quad ^{\alpha}Y = \left[2\alpha+4,\ 8-2\alpha\right].$$

4.1. Додавання нечітких чисел

Знаходимо суму α -зрізів нечітких чисел X та Y :

$$^{\alpha}X + {}^{\alpha}Y = \left[2+\alpha,\ 5-2\alpha\right] + \left[2\alpha+4,\ 8-2\alpha\right] = [3\alpha+6,\ 13-4\alpha]. \qquad (34)$$

Для знаходження характеристичної функції $\mu_{X+Y}(x)$ прирівнюємо до x ліву та праву границі інтервалу з виразу (34). Маємо $x = 3\alpha+6,\ x = 13-4\alpha.$

Виражаємо α через $x,$ покладаючи, що $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ у виразі (34):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x-6}{3}, \quad 2+4 \le x \le 3+6, \\ \alpha &= \frac{13-x}{4}, \quad 3+6 \le x \le 5+8. \end{aligned} \qquad (35)$$

З виразу (13) та (35) отримуємо характеристичну функцію суми двох нечітких чисел X та Y : $\mu_{X+Y}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-6}{3}, & 6 \le x \le 9, \\ \dfrac{13-x}{4}, & 9 \le x \le 13. \end{cases}$

4.2. Віднімання нечітких чисел

Знаходимо різницю α -зрізів нечітких чисел X та Y :

$$^{\alpha}X - {}^{\alpha}Y = \left[2+\alpha,\ 5-2\alpha\right] - \left[2\alpha+4,\ 8-2\alpha\right] = [3\alpha-6,\ 1-4\alpha]. \qquad (36)$$

Для знаходження характеристичної функції $\mu_{X-Y}(x)$ прирівнюємо до x ліву та праву границі інтервалу з виразу (36). Маємо $x = 3\alpha-6,\ \ x = 1-4\alpha.$

Виражаємо α через $x,$ покладаючи, що $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ у виразі (36):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x+6}{3}, \quad 2-8 \le x \le 3-6, \\ \alpha &= \frac{1-x}{4}, \quad 3-6 \le x \le 5-4 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x+6}{3}, \quad -6 \le x \le -3, \\ \alpha &= \frac{1-x}{4}, \quad -3 \le x \le 1. \end{aligned} \qquad (37)$$

З виразу (17) та (37) отримуємо характеристичну функцію різниці двох нечітких чисел X та Y : $\mu_{X-Y}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+6}{3}, & -6 \le x \le -3, \\ \dfrac{1-x}{4}, & -3 \le x \le 1. \end{cases}$

4.3. Множення нечітких чисел

Знаходимо добуток α -зрізів нечітких чисел X та Y:

$$^{\alpha}X * {}^{\alpha}Y = [2+\alpha,\ 5-2\alpha]*[2\alpha+4,\ 8-2\alpha].$$

Для цього виконуємо такі обчислення:

$$(2+\alpha)(2\alpha+4) = 4\alpha+8+2\alpha^2+4\alpha = 2\alpha^2+8\alpha+8,$$
$$(5-2\alpha)(8-2\alpha) = 40-10\alpha-16\alpha+4\alpha^2 = 4\alpha^2-26\alpha+40.$$

Тоді маємо

$$^{\alpha}X * {}^{\alpha}Y = [2+\alpha,\ 5-2\alpha]*[2\alpha+4,\ 8-2\alpha] = [2\alpha^2+8\alpha+8,\ 4\alpha^2-26\alpha+40]. \quad (38)$$

Для знаходження характеристичної функції $\mu_{XY}(x)$ прирівнюємо до x ліву та праву границі інтервалу з виразу (38). Маємо $x = 2\alpha^2+8\alpha+8,\ x = 4\alpha^2-26\alpha+40.$

Виражаємо α через $x,$ покладаючи, що $\alpha=0$ та $\alpha=1$ у виразі (38). Спочатку виражаємо α з першого рівняння: $x = 2\alpha^2+8\alpha+8.$

Для цього перепишемо рівняння у такій формі: $2\alpha^2+8\alpha+(8-x)=0.$

Далі розв'язуємо дане квадратне рівняння відносно $\alpha.$

Розраховуємо дискримінант: $D = 64-4\cdot2\cdot(8-x) = 64-64+8x = 8x.$

Тоді $\alpha = \dfrac{-8+\sqrt{8x}}{2\cdot2} = \dfrac{-8+2\sqrt{2x}}{4} = \dfrac{-4+\sqrt{2x}}{2}, \quad 2\cdot4 \le x \le 3\cdot6.$

Маємо $\alpha = \dfrac{-4+\sqrt{2x}}{2}, \quad 8 \le x \le 18.$

Тепер знаходимо α з другого рівняння: $x = 4\alpha^2-26\alpha+40.$ Знов перепишемо рівняння у більш зручній формі: $4\alpha^2-26\alpha+(40-x)=0.$

Знаходимо дискримінант: $D = 26^2-4\cdot4\cdot(40-x) = 676-640+16x = 36+16x.$

Тоді $\alpha = \dfrac{26-\sqrt{36+16x}}{8} = \dfrac{26-\sqrt{4(9+4x)}}{8} = \dfrac{13-\sqrt{9+4x}}{4}, \quad 3\cdot6 \le x \le 5\cdot8.$

Маємо $\alpha = \dfrac{13-\sqrt{9+4x}}{4}, \quad 18 \le x \le 40.$

Використовуючи вираз (22), отримуємо характеристичну функцію $\mu_{XY}(x)$ добутку двох нечітких чисел X та Y: $\mu_{XY}(x) = \begin{cases} \dfrac{-4+\sqrt{2x}}{2}, & 8 \le x \le 18, \\ \dfrac{13-\sqrt{9+4x}}{4}, & 18 \le x \le 40. \end{cases}$

4.4. Ділення нечітких чисел

Знаходимо частку α -зрізів нечітких чисел X та Y:

$$\frac{^{\alpha}X}{^{\alpha}Y} = \frac{[2+\alpha,\ 5-2\alpha]}{[2\alpha+4,\ 8-2\alpha]} = \left[\frac{2+\alpha}{8-2\alpha};\quad \frac{5-2\alpha}{2\alpha+4}\right]. \quad (39)$$

Для знаходження характеристичної функції $\mu_{X/Y}(x)$ прирівнюємо до x ліву та праву границі інтервалу з виразу (39). Маємо $x = \dfrac{2+\alpha}{8-2\alpha}, \quad x = \dfrac{5-2\alpha}{2\alpha+4}.$

Виражаємо α через x, покладаючи, що $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ у виразі (39). Маємо

$$\begin{aligned} &x(8-2\alpha) = 2+\alpha, && x(2\alpha+4) = 5-2\alpha, \\ &8x-2x\alpha = 2+\alpha, && 2x\alpha+4x = 5-2\alpha, \\ &8x-2 = \alpha(1+2x), && \alpha(2x+2) = 5-4x, \\ &\alpha = \frac{8x-2}{1+2x}. && \alpha = \frac{5-4x}{2x+2}. \end{aligned}$$

Згідно з виразом (29), характеристична функція $\mu_{X/Y}(x)$ частки двох нечітких чисел X та Y: $\mu_{X/Y}(x) = \begin{cases} \dfrac{8x-2}{1+2x}, & \dfrac{1}{4} \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{5-4x}{2x+2}, & \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

4.5. Квадратний корінь із нечіткого числа

Для підрахунку квадратного кореня із нечіткого числа X обчислюємо квадратний корінь із α -зрізу нечіткого числа X, використовуючи інтервальну арифметику:

$$\sqrt{{}^{\alpha}X} = \sqrt{[2+\alpha,\, 5-2\alpha]} = \left[\sqrt{2+\alpha},\ \sqrt{5-2\alpha}\right]. \qquad (40)$$

Для знаходження характеристичної функції $\mu_{\sqrt{X}}(x)$ прирівнюємо до x ліву та праву границі інтервалу з виразу (40). Отримуємо

$$x = \sqrt{2+\alpha}, \quad x = \sqrt{5-2\alpha}. \qquad (41)$$

З рівнянь (41) виражаємо α через x, покладаючи, що $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ у виразі (40). Маємо

$$\begin{aligned} &x = \sqrt{2+\alpha}, && x = \sqrt{5-2\alpha}, \\ &x^2 = 2+\alpha, && x^2 = 5-2\alpha, \\ &\alpha = x^2-2, && \alpha = \frac{5-x^2}{2}. \end{aligned}$$

Згідно з виразом (33), характеристична функція $\mu_{\sqrt{X}}(x)$ квадратного кореня нечіткого числа X: $\mu_{\sqrt{X}}(x) = \begin{cases} x^2-2, & \sqrt{2} \le x \le \sqrt{3}, \\ \dfrac{5-x^2}{2}, & \sqrt{3} \le x \le \sqrt{5}. \end{cases}$

5. Висновки

У статті перераховані основні новітні підходи до застосування теорії нечітких множин, а саме: наголошувалося на тому, що нечіткі множини та нечіткі числа застосовуються під час попередньої обробки космічних зображень, у методах нечіткої кластеризації, для знаходження базових мас, які, у свою чергу, використовуються в задачах класифікування та при оцінці результатів класифікування супутникових зображень. Зазначалося, що теорія нечітких множин дозволяє працювати з неповною та неточною інформацією. Це дає змогу отримати більш точні результати класифікування [7–9].

У даній роботі розглядалися основні арифметичні операції над нечіткими числами з використанням методу альфа-зрізів, а саме: операції додавання, віднімання, множення, ділення нечітких чисел та взяття кореня квадратного з нечіткого числа і наводилися числові приклади даних арифметичних операцій над нечіткими числами. Наголошувалося на тому, що теорія нечітких множин та нечіткі числа можуть бути застосовані при класифікуванні гіперспектральних космічних зображень, вирішенні численних природно-ресурсних та екологічних задач, при пошуку корисних копалин, родовищ нафти та газу [10–11].

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Kaufman A., Gupta M.M. Introduction to Fuzzy Arithmetic, Theory and applications / Van Nostrand Reinhold Co. Inc., Workingham, Berkshire, 2003. 361 p.

2. Еремеев В., Мордвинцев И., Платонов Н. Современные гиперспектральные сенсоры и методы обработки гиперспектральных данных. *Исследование Земли из космоса*. 2003. № 6. С. 80–90.

3. Dubois D., Prade H. Fundamentals of Fuzzy sets. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 125–193.

4. Альперт С.І. Застосування методів комбінування даних при класифікуванні супутникових зображень. *Математичні машини і системи*. 2019. № 2. С. 16–26.

5. Bandos T.V., Bruzzone L., Camps-Valls G. Classification of Hyperspectral Images with Regulized Linear Disctiminant Analysis. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 2009. Vol. 47, N 3. P. 862–873.

6. Dutta P., Boruah H., Ali T. Fuzzy arithmetic with and without using *a*-cut method: a comparative study. *International Journal of Latest trends in Computing*. 2011. Vol. 2 (1). P. 99–108.

7. Попов М.О. Сучасні погляди на інтерпретацію даних аерокосмічного дистанційного зондування Землі. *Космічна наука і технологія*. 2002. Т. 8, № 2/3. С. 110–115.

8. McCoy R.M. Fields Methods in Remote Sensing. New York: Guilford Press, 2005. P. 150–160.

9. Вятченин Д.А. Нечеткие методы автоматической классификации. Минск, 2004. 219 с.

10. Альперт С.І. Методи селекції інформативних зональних зображень при класифікації гіперспектральних супутникових зображень. *Математичні машини і системи.* 2015. № 2. С. 40–48.

11. Альперт С.І. Основні міри подібності та нові підходи до їх застосування при класифікуванні гіперспектральних космічних зображень. *Математичні машини і системи*. 2019. № 1. С. 143–151.

Стаття надійшла до редакції 18.02.2020